Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático
Asignatura: Cálculo
Primer curso de la Licenciatura de Ciencias Matemáticas

Ejercicios para hacer en clase (5$^{\underline{a}}$ entrega)

1. Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$x_1=1,\ \ x_{n+1}=\frac{4+3x_n}{3+2x_n}; \qquad x_1=\sqrt{a},\ \ x_{n+1}=\sqrt{a+x_n} \quad (a>0)$$

   Sugerencia: estudiar en cada caso monotonía y acotación.

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen $\rho\in]0,1[$, $p\in\mathbb{N}$, tales que $|x_{n+2}-x_{n+1}|\leqslant\rho|x_{n+1}-x_n|$ para todo $n\geqslant p$. Pruébese que $\{x_n\}$ es convergente.

   Sugerencia: dedúzcase primero que $|x_{n+2}-x_{n+1}|\leqslant\rho^n|x_2-x_1|$. Teniendo ahora en cuenta que para todos $n,h\in\mathbb{N}$ se verifica que:

$$\rho^{n+h}+\rho^{n+h-1}+\rho^{n+h-2}+\cdots+\rho^n<\frac{\rho^n}{1-\rho}$$

   dedúzcase que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

   Aplicación: estudiar la convergencia de las sucesiones definidas para todo $n\in\mathbb{N}$ por:

$$\textbf{a})\ x_1=1,\ \ x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}; \qquad \textbf{b})\ x_1=\sqrt{2},\ \ x_{n+1}=\sqrt{2-x_n}.$$

3. Calcúlense los límites de las sucesiones

$$\frac{1+1/2+\cdots+1/n}{\log(n)}; \quad \frac{1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad (\alpha>-1); \quad \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(2n)^{3n}}}$$

$$\frac{n\log n}{\log n!}; \quad \left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n}; \quad \frac{\log\left(1+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)}$$

4. Sabiendo que $\{a_n\}\to a$, calcúlese el límite de la sucesión:

$$\frac{\exp(a_1)+\exp(a_2/2)+\cdots+\exp(a_n/n)-n}{\log n}$$